



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 18.02.2017

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

a) Să se calculeze valoarea sumei $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.

b) Să se arate că $(z_1 + \overline{z_2}) \cdot (z_2 + \overline{z_3}) \cdot (z_3 + \overline{z_1}) \in \mathbf{R}$.

* * *

SUBIECTUL 2

a) Arătați că $\log_2 7 > \log_3 5 + \log_5 7$.

Dorin Arventiev

b) Să se rezolve ecuația $2^x - 2^{\sqrt{x}} = 12$.

Marius Cavachi

SUBIECTUL 3

Să se arate că pentru orice $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci:

$$\sqrt{\log_a bc \cdot \log_b ac} + \sqrt{\log_b ac \cdot \log_c ab} + \sqrt{\log_c ab \cdot \log_a bc} \geq 6.$$

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = [x] - \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$. Arătați că funcția f este bijectivă.

(S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului x , iar cu $\{x\}$ partea fracționară).

Niculae Cavachi

Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu